**ΑΣΚΗΣΕΙΣ:**

1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$2x^2y''+3xy'-y=0, \quad x>0,$$

αν $y_1(x)=x^{-1}$ είναι μια ειδική λύση της.

2. Δοθέντος ότι $y_1(x)=x$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0, \quad -1<x<1,$$

να βρεθεί μια δεύτερη γραμμικώς ανεξάρτητη λύση.

3. Έστω ότι $p(x)$ και $q(x)$ είναι δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις σ' ένα ανοικτό διάστημα $I$. Αν $y_1(x)$ είναι μια μη-μηδενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,$$

να βρεθεί η γενική της λύση.

ΛΥΣΗ

1. Εκτελώντας τον μετασχηματισμό

$$y(x)=x^{-1}u(x) \quad (1)$$

έχουμε

$$y'=x^{-1}u'-x^{-2}u,$$

και

$$y''=x^{-1}u''-2x^{-2}u'+2x^{-3}u.$$

Αντικαθιστώντας έτσι στην δοθείσα διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$2x^{-2}\{x^{-1}u''-2x^{-2}u'+2x^{-3}u\}+3x\{x^{-1}u'-x^{-2}u\}-x^{-1}u=0$$

ή ισοδύναμα

$$2xu''-u'=0. \quad (2)$$

ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΑΞΗΣ ΜΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του $u$ στην (2) είναι μηδέν, όπως θα έπρεπε. (Σημειώνουμε ότι ο μετασχηματισμός D'Alembert έχει πάντοτε αυτό το χαρακτηριστικό!). Θέτοντας τώρα στην (2)

$$u' = z \quad (3)$$

και επιλύοντας με την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών (βλ. [Κεφ. 2, παρ.2]) βρίσκουμε εύκολα ότι

$$u' = C\sqrt{x},$$

οπότε

$$u(x) = \frac{2}{3}Cx^{3/2} + D,$$

και άρα από την (1),

$$y(x) = x^{-1}u(x) = \frac{2}{3}C\sqrt{x} + Dx^{-1}, \quad (3)$$

όπου $C, D$ είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Ο τύπος (3) δίνει την γενική λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης (ελέγξτε το !!).

2. Εκτελώντας τον μετασχηματισμό

$$y(x) = xu(x) \quad (1)$$

έχουμε

$$y' = xu' + u,$$

και

$$y'' = xu'' + 2u'.$$

Αντικαθιστώντας έτσι στην δοθείσα διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$(1 - x^2)(xu'' + 2u') - 2x(xu' + u) + 2xu = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$u'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1 - x^2}\right)u' = 0. \quad (2)$$

ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΑΞΗΣ ΜΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΓΡΑΜ ΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του $u'$ δεν ορίζεται όταν $x = 0$, δηλ. στο σημείο που μηδενίζεται η $y_1(x)$. Εν τούτοις αυτό δεν θα δημιουργήσει πρόβλημα στην συνέχεια. Θα υπολογίσουμε πρώτα την λύση της (2) στα διαστήματα $-1 < x < 0$ και $0 < x < 1$ ξεχωριστά. Θέτοντας

$$u' = z,$$

και επιλύοντας με την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών (βλ. Κεφ. 2, παρ.2) βρίσκουμε εύκολα ότι

$$z(x) = Cx^{-2}\left(1 - x^2\right)^{-1},$$

οπότε

$$u(x) = C\int^{x} \frac{1}{t^2\left(1-t^2\right)}dt = C\int^{x}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right)dt$$

$$= C\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right) + D,$$

και άρα από την (1),

$$y(x) = xu(x) = C\left(-1 + \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right) + Dx, \quad (3)$$

όπου $C, D$ είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Ο τύπος (3) δίνει την γενική λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης στα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$. Παρατηρούμε όμως ότι ενώ η συνάρτηση $u(x)$ δεν ορίζεται στο σημείο $x = 0$, το όριο της $xu(x)$ καθώς $x \to 0$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Εύκολα μάλιστα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι η (3) δίνει την γενική λύση όχι μόνον στα $(-1,0)$ και $(0,1)$ αλλά σε όλο το διάστημα $(-1,1)$. Παρεπιπτόντως βλέπουμε ότι η $y(x)$ δεν είναι φραγμένη καθώς $x \to \pm 1$, ένα φαινόμενο που είναι στενά συνδεδεμένο με το γεγονός ότι ο συντελεστής του $y''$ στην εξίσωση μηδενίζεται όταν $x = \pm 1$ ενώ αυτοί των $y'$ και $y$ όχι. Τέλος, αν θέσουμε $C = 1$, $D = 0$ στην (3) προκύπτει ότι μια δεύτερη γραμμικώς ανεξάρτητη λύση της εξίσωσης είναι η

$$y_2(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1.$$

3. Εκτελώντας τον μετασχηματισμό

ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΑΞΗΣ ΜΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

$$W(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0 \quad (1)$$

έχουμε

$$y' = y_1 u' + y_1' u ,$$

και

$$y'' = y_1 u'' + 2 y_1' u' + y_1'' u .$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην δοθείσα διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$u'' y_1 + u' \left( 2 y_1' + p y_1 \right) + u \left( y_1'' + p y_1' + q y_1 \right) = 0 . \quad (2)$$

Όμως

$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 ,$$

και επειδή εξ' υποθέσεως η $y_1$ δεν είναι εκ ταυτότητος ίση με μηδέν, η (2) μπορεί να πάρει την μορφή

$$u'' + \left( p + 2 \frac{y_1'}{y_1} \right) u' = 0 . \quad (3)$$

Έτσι θέτοντας

$$u' = z$$

και επιλύοντας την (3) με την γνωστή μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών (βλ. Κεφ. 2, παρ.2 ) βρίσκουμε εύκολα ότι

$$z(x) = C \exp\left[ - \int^x \left( p(s) + 2 \frac{y_1'(s)}{y_1(s)} \right) ds \right] = C \frac{1}{[y_1(x)]^2} \exp\left( - \int^x p(s) ds \right),$$

οπότε

$$u(x) = C \left[ \int^x \frac{1}{[y_1(t)]^2} \exp\left( - \int^t p(s) ds \right) dt \right] + D ,$$

και άρα από την (1)

ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΑΞΗΣ ΜΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

$$y(x) = Cy_1(x)\left[\int^x \frac{1}{[y_1(t)]^2}\exp\left(-\int^t p(s)ds\right)dt\right] + Dy_1(x) \quad . (4)$$

όπου $C, D$ είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Ο τύπος (4) δίνει την γενική λύση της δοθείσας εξίσωσης.

ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΑΞΗΣ ΜΙΑΣ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ